Despre unele aplicaţii ale numerelor complexe în geometrie

DOHOTARU Leonid and ORLOV Victor

Vom arăta cum pot fi aplicate numerele complexe pentru rezolvarea unor probleme geometrice.

Problema 1. Se ştie că numărul complex $w = \dfrac{z-1}{z+1}$, $z \neq -1$, este pur imaginar atunci şi numai atunci când $|z| = 1$.

Să deducem în baza acestei afirmaţii, că unghiul înscris în cerc şi care se sprijină pe diametru este egal cu $\dfrac{\pi}{2}$.

Într-adevăr, fie $|z| = 1$, adică punctul z este situat pe un cerc de raza 1. Numerele $z+1 = z-(-1)$ şi $z-1$ sunt coordonatele complexe ale vectorilor $\overrightarrow{Az}$ şi $\overrightarrow{Bz}$, respectiv (fig. 1).

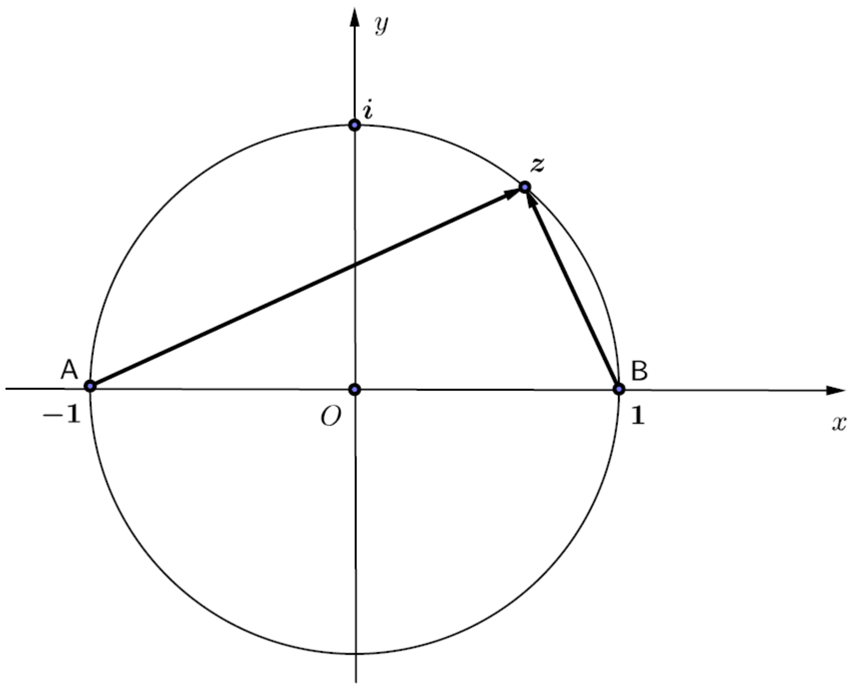

Fig.1

Deoarece $|z| = 1$, atunci $w = \dfrac{z-1}{z+1} = ai$, aici $a \in \mathbb{R}$. De aceea, unghiul $\angle AzB$ dintre vectorii $\overrightarrow{Az}$ şi $\overrightarrow{Bz}$ este egal

$$\arg(z-1) - \arg(z+1) = \arg(ai) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{dacă } a > 0; \\ \dfrac{3\pi}{2}, & \text{dacă } a < 0. \end{cases}$$

Acest rezultat poate fi generalizat pentru orice cerc de rază arbitrară. Pentru aceasta este suficient de considerat numărul $kw = \dfrac{k \cdot w - k}{k \cdot w + k}$, aici $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Să se demonstreze că trei puncte distincte z_1, z_2, z_3 sunt situate pe o dreaptă atunci şi numai atunci când raportul $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R}$.

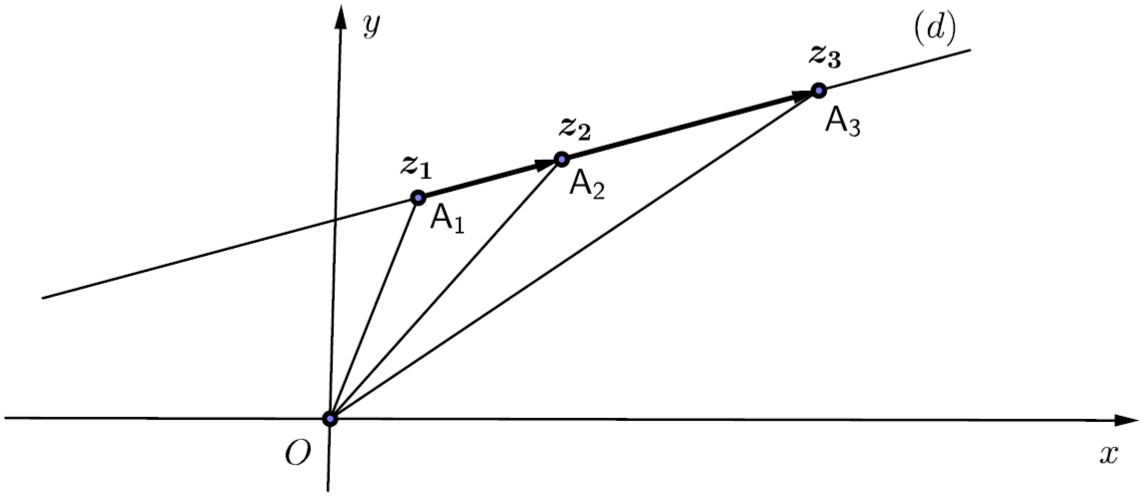

Fig. 2a

Trei puncte z_1, z_2 şi z_3 sunt situate pe o dreaptă atunci şi numai atunci când $\overrightarrow{A_1A_2}$ şi $\overrightarrow{A_2A_3}$, care au coordonatele complexe $z_2 - z_1$ şi, respectiv $z_3 - z_2$ sunt situaţi pe aceeaşi dreaptă (Fig. 2a, Fig. 2b).

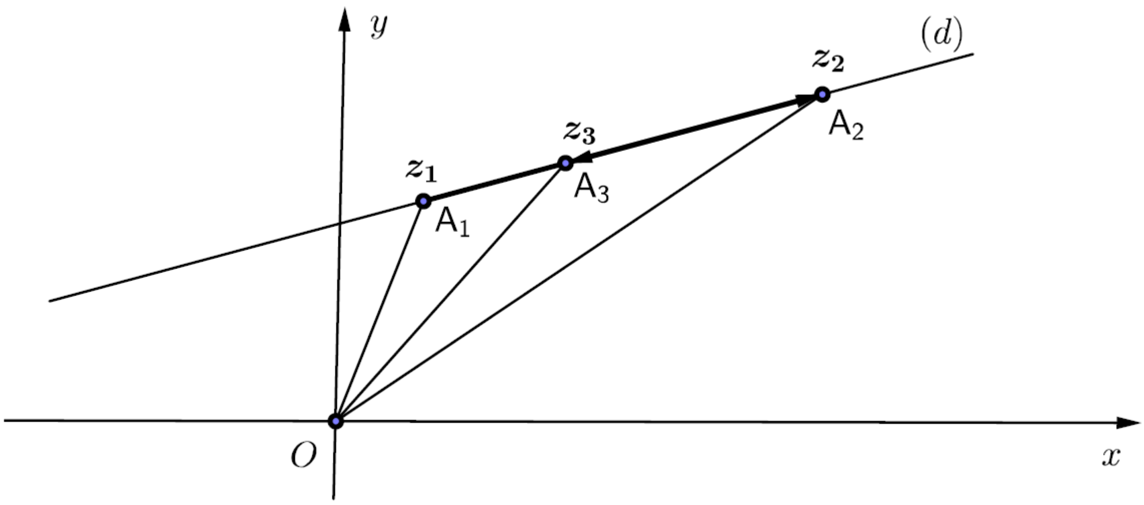

Fig. 2b

Deci, unghiul dintre aceşti vectori este egal cu 0 sau π. De aici rezultă că argumentul raportului $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}$ este egal cu 0 sau π, adică acest raport reprezintă un număr real.

Deoarece egalitatea $z = \overline{z}$ are loc doar pentru z real, atunci condiţia de apartenenţă a trei puncte z_1, z_2 şi z_3 unei drepte poate fi scrisă în următoarea formă:

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \overline{\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}\right)} = \frac{\overline{z_2 - z_1}}{\overline{z_3 - z_2}} = \frac{\overline{z_2} - \overline{z_1}}{\overline{z_3} - \overline{z_2}} \in \mathbb{R}.$$

Problema 3. Să se demonstreze că patru puncte distincte z_1, z_2, z_3 şi z_4 aparţin cercului atunci şi numai atunci, când raportul dublu $\dfrac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} : \dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \in \mathbb{R}$.

`Demonstraţie:` Vom demonstra necesitatea.

Necesitatea: Fie punctele A_1, A_2, A_3, A_4 aparţin cercului dat. Vectorii $\overrightarrow{A_4A_1}$, $\overrightarrow{A_3A_1}$, $\overrightarrow{A_4A_2}$ şi $\overrightarrow{A_3A_2}$ (Fig. 3), posedă coordonatele complexe $z_1 - z_4$, $z_1 - z_3$, $z_2 - z_4$, $z_2 - z_3$ respectiv.

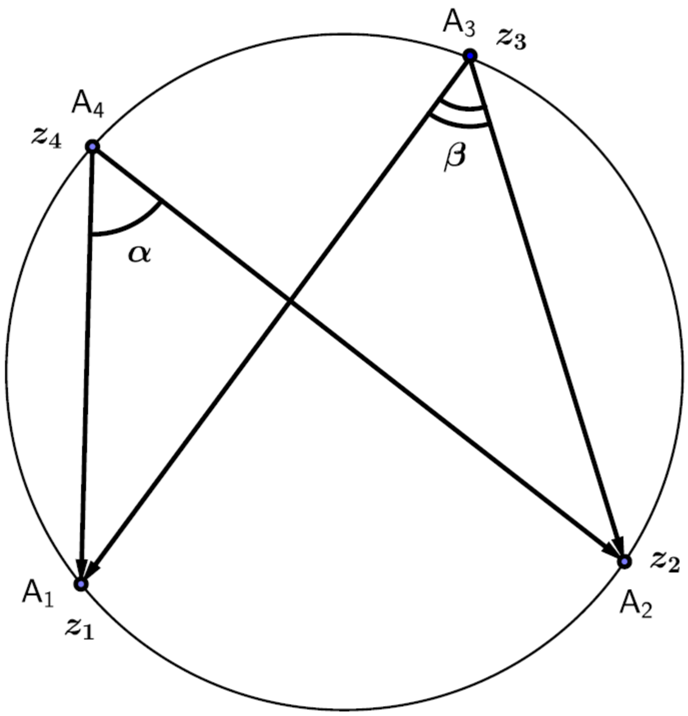

Fig. 3

Fie α unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{A_4A_1}$ şi $\overrightarrow{A_3A_1}$, iar β - dintre $\overrightarrow{A_4A_2}$ şi $\overrightarrow{A_3A_2}$. Deoarece $\alpha = \arg\dfrac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}$, $\beta = \arg\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$, avem $\dfrac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} = r(\cos\alpha + i\ \sin\alpha)$, $\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \rho(\cos\beta + i\ \sin\beta)$.

Însă $\alpha = \beta$, ca unghiuri înscrise în cerc, care se sprijină pe acelaşi arc. De aici obţinem: $\dfrac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} : \dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \dfrac{r}{\rho} > 0$ - număr real.

Problema 4. Să se demonstreze că suma pătratelor diagonalelor paralelogramului este egală cu suma pătratelor laturilor lui. Considerăm sistemul de coordonate arătat în Fig. 4.

Dacă z_1 şi z_2 sunt coordonatele complexe a două vârfuri ale paralelogramului, atunci $z = z_1 + z_2$ este coordonata complexă a celui de al treilea vârf al paralelogramului.

Atunci:

$$|\overrightarrow{z_1 z_2}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 = (z_2 - z_1) \cdot \overline{(z_2 - z_1)} + (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} =$$

$$= (z_2 - z_1)(\overline{z_2} - \overline{z_1}) + (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_2\overline{z_2} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} =$$

$$= 2\left(z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}\right) = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) = 2\left(|\overrightarrow{Oz_1}|^2 + |\overrightarrow{Oz_2}|^2\right).$$

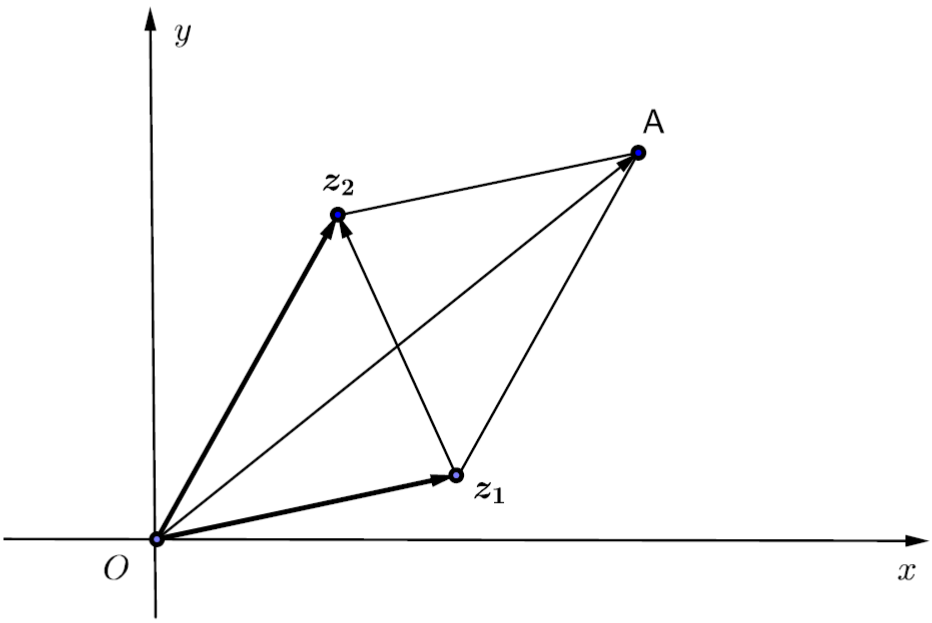

Fig. 4

References

[1] I. Achiri, V. Ciobanu, P. Efros, V. Garit, V. Neagu, N. Prodan, D. Taragan, A.Topală. MATEMATICĂ. Ediţia a II-a revizuită şi completată, Manual pentru clasa a XI, PRUT, 2014.

[2] Понтрягин Л.С. Обобщения чисел. Москва, Наука, 1986.

[3] Яглом И.М. Комплексные числа. Москва, Наука, 1963.

(DOHOTARU Leonid, ORLOV Victor) Universitatea Tehnică a Moldovei

E-mail address: dohotaru_leonid@yahoo.com, orlovictor@gmail.com