Despre asimtotele unor funcții

Olga Cerbu, Alina Țurcanu

Definiția 1. *Se numește asimptotă, dreapta verticală, orizontală sau oblică față de care graficul unei funcții se apropie oricât de mult. Fie* $f: E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

***1.1. Asimptota verticală**: Dreapta* $x =a$ *se numește:*

1.1.1) ***asimptotă verticală la stânga**, dacă* $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ *sau* $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$.

1.1.2) ***asimptotă verticală la dreapta**, dacă* $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ *sau*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty.$$

1.2. Asimptota orizontala:

1.2.1) Dreapta $y = n$ *se numește:* ***asimptotă orizontală spre** $+\infty$, dacă:*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = n,\ n - \text{finit}.$$

1.2.2) Dreapta $y = n'$ *se numește:* ***asimptotă orizontală spre** $-\infty$, dacă:*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = n',\ n' - \ \text{finit}.$$

Deci, pentru a găsi asimptotele orizontale ale funcției $f: E \to \mathbb{R}$, se caută limita funcției la $+\infty$ și $-\infty$, dacă $+\infty$ și $-\infty$ sunt puncte de acumulare pentru mulțimea E.

1.3. Asimptota oblica : *Fie* $f: E \to \mathbb{R}$, $E\epsilon \subseteq \mathbb{R}$, $(a, \infty) \in E$, $a \in \mathbb{R}$.

1.3.1) Dreapta $y = mx + n$ *se numește:* ***asimptotă oblică spre** $+\infty$, dacă:*

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - n] = 0.$$

1.3.2) Dreapta $y = m'x + n'$ *se numește:* ***asimptotă oblică spre** $-\infty$, dacă:*

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - m'x - n'] = 0.$$

Coeficienții m, n, m', n' *se calculează astfel:*

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x};\ n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx];\ \ m \neq 0;$$

© 2018 by Olga Cerbu, Alina Țurcanu

$$m' = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x};\ n' = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - m'x];\quad m' \neq 0.$$

O curbă poate avea numai o asimptotă la stânga sau la dreapta, însă pot exista orice număr de asimptote verticale, ca în cazul funcției $y = tg\ x$.

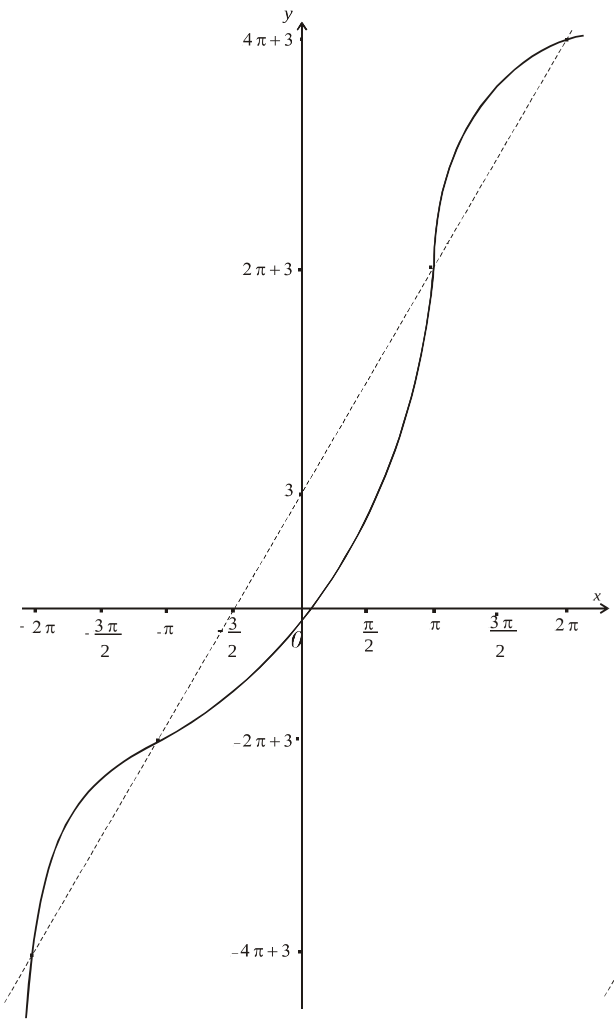
Vom examina asimptotele unor funcții și momentele la care dorim să atragem atenția cum ar fi:

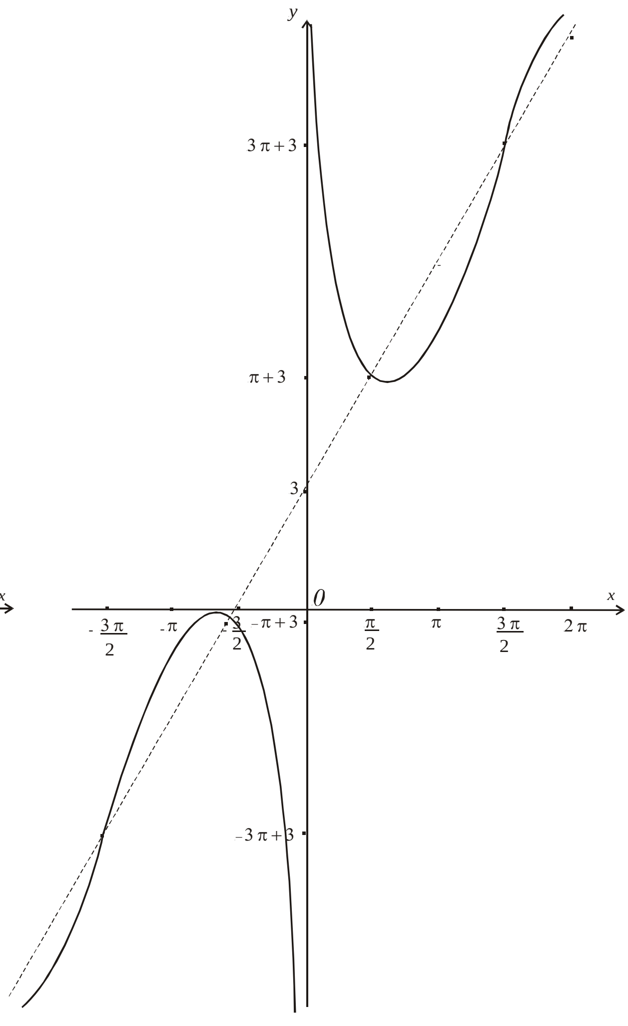
- graficele funcției și a asimptotei se pot intersecta de o infinitate de ori (vezi exemplele 1, 3, 4, 5, 6);
- unele funcții cu o infinitate de puncte de discontinuitate de asemenea pot avea asimptote (vezi exemplul 4).

Exemple.

Exemplul 1. $f(x) = 2x + 3 - 3\frac{\sin x}{x}$. *y=2x+3* este asimptotă la stânga și la dreapta.

Exemplul 2. $f(x) = 2x + 3 - 3\frac{\cos x}{x}$. *y=2x+3* este asimptotă la stânga și la dreapta, dar mai există și o asimptotă verticală *x=0*.

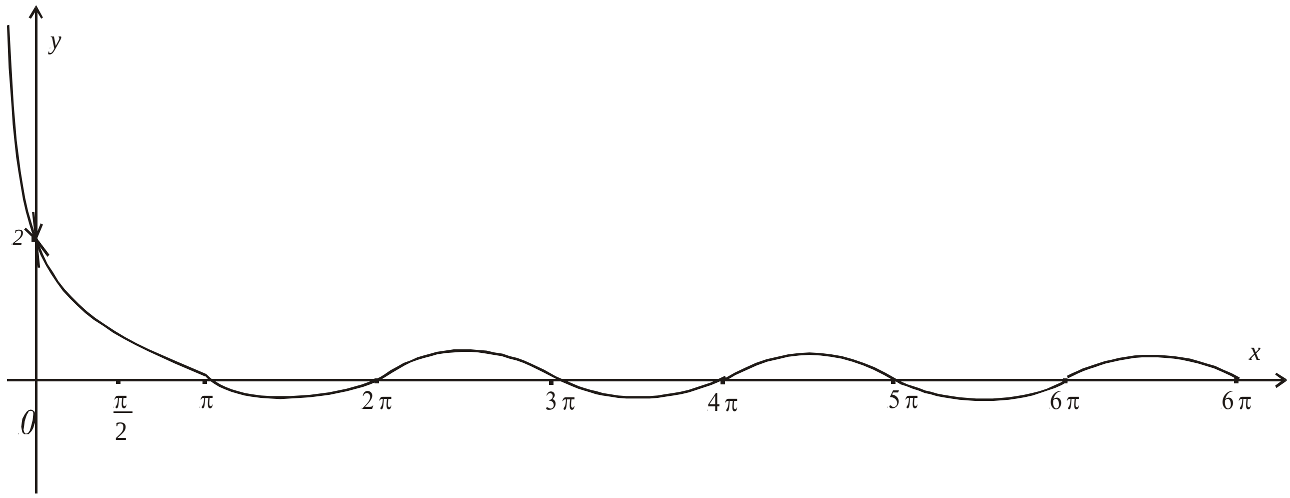




© 2018 by Olga Cerbu, Alina Țurcanu

3. $f(x) = e^{-x} + \frac{\sin x}{x}$

$y = 0$ este asimptotă orizontală la dreapta. Graficele funcției și a asimptotei se intersectează de o infinitate de ori.



4. $f(x) = 2x + 3 + (-1)^{[x]} \cdot \frac{\{x\}}{x}$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a lui x, iar $[x]$ este partea întreagă a lui x.

a) Pentru $x \in (0, 1)$, avem $(-1)^{[x]} \cdot \frac{\{x\}}{x} = (-1)^0 \cdot \frac{x}{x} = 1$.

b) Pentru $x = 0$, $f(x)$ nu este definită.

c) Pentru $x \in (-1, 0)$, avem $(-1)^{[x]} \cdot \frac{\{x\}}{x} = (-1)^{-1} \cdot \frac{-1+x}{x} = -1 + \frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = -\infty$.

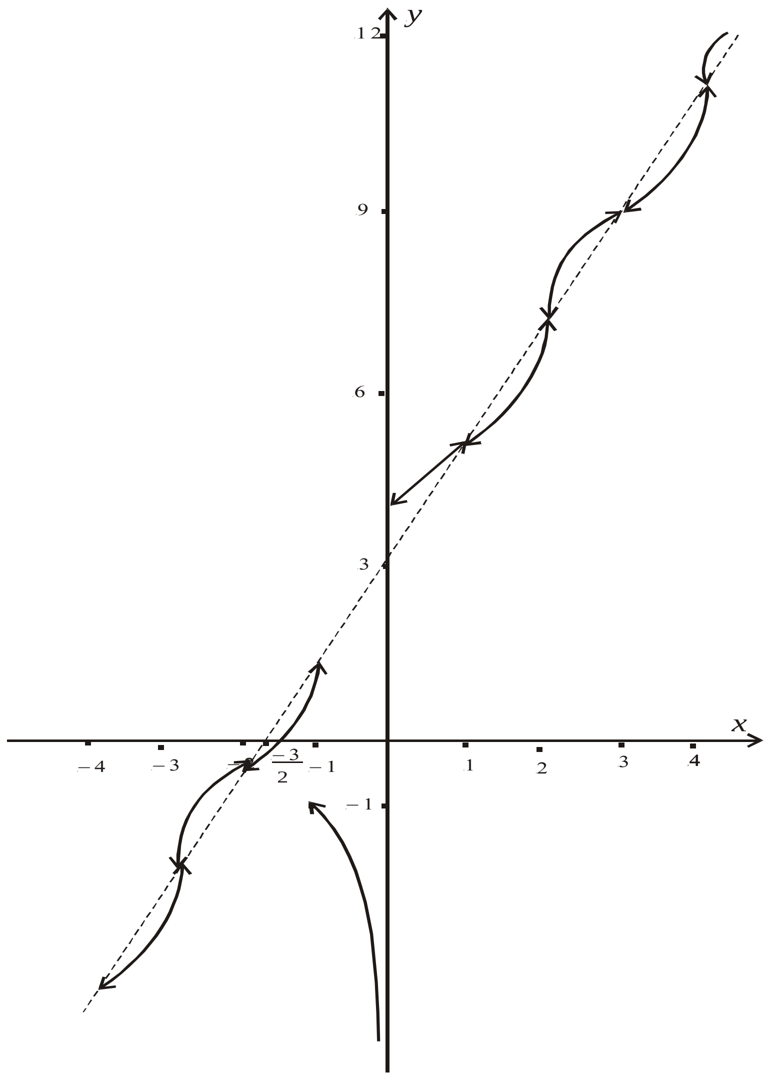
Astfel $x = 0$ este asimptotă verticală la stânga în punctul $x = 0 - 0$.

d) Pentru $x \in (-2, -1)$, avem $(-1)^{[x]} \cdot \frac{\{x\}}{x} = (-1)^{-2} \cdot \frac{2+x}{x} = 1 + \frac{2}{x}$;

e) Pentru $x \in (-3, -2)$, avem $(-1)^{[x]} \cdot \frac{\{x\}}{x} = (-1)^{-3} \cdot \frac{-3+x}{x} = -1 + \frac{3}{x}$.

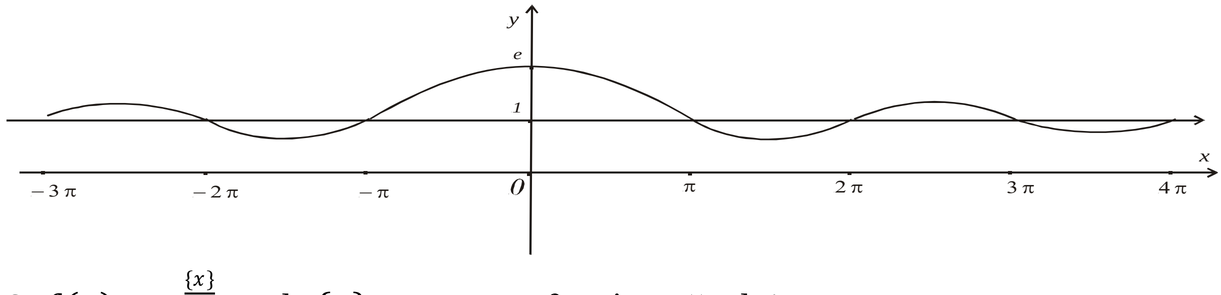
În rezultat, funcția $f(x) = 2x + 3 + (-1)^{[x]} \cdot \frac{\{x\}}{x}$, are o infinitate de puncte de discontinuitate, iar dreapta $y=2x+3$ este asimptotă la stânga și la dreapta pentru ea.

© 2018 by Olga Cerbu, Alina Țurcanu



5. $f(x) = e^{\frac{\sin x}{x}}$.

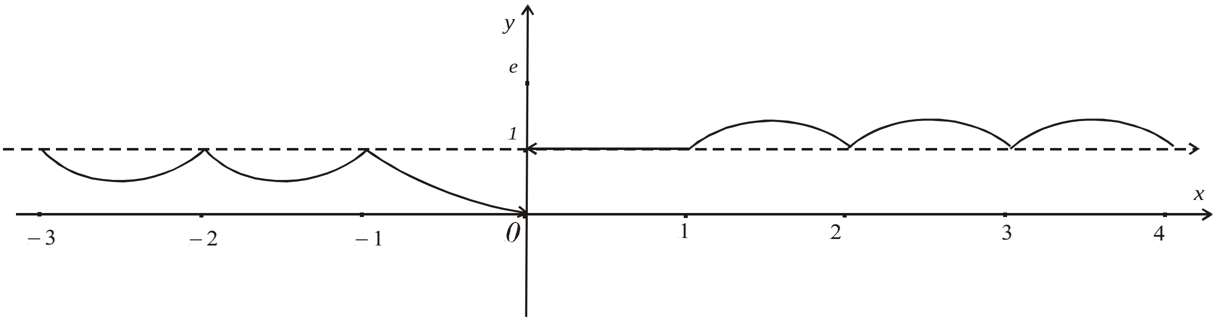
y=*1* este asimptotă la stânga și la dreapta. Și în acest caz graficul funcției și a asimptotei se intersectează de o infinitate de ori.



6. $f(x) = e^{\frac{\{x\}}{x}}$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a lui x.

y=*1* este asimptotă la stânga și la dreapta, care se intersectează cu graficul funcției de o infinitate de ori.

© 2018 by Olga Cerbu, Alina Țurcanu



Astfel de funcții, pentru care graficele funcției și a asimptotei se pot intersecta de o infinitate de ori sau care posedă o infinitate de puncte de discontinuitate, dar care pot avea asimptote sunt foarte multe și prezintă un segment interesant de studiu.

Bibliografie

1. Botnaru D. Îndrumator la metematică. Chişinău, Ed. Tehnica, 2008.

Olga Cerbu

Universitatea de Stat din Moldova

e-mail: olga.cerbu@gmail.com

Alina Țurcanu

Universitatea Tehnică a Moldovei

e-mail: turcan.alina@civis.md

© 2018 by Olga Cerbu, Alina Țurcanu